# אורתוגונליות ואורתונורמליות

## בסיס אורתוגונלי ואורתונורמלי

**הגדרה:** יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי v1, v2, …, vn וקטורי הבסיס של V. אם vivj כלומר , לכל *אזי בסיס זה נקרא "בסיס אורתוגונלי". אם בנוסף כל הוקטורים בבסיס הם וקטורי היחידה, כלומר לכל* i*,* *אזי בסיס זה נקרא "בסיס אורתונורמלי". במידה ובסיס מסוים אורתוגונלי אך אינו אורתונורמלי, נוכל לנרמל את כל הוקטורים בו כך שיהפוך לבסיס אורתונורמלי. הבסיס האורתונורמלי הכי מפורסם לפי מכפלה סקלרית הוא הבסיס הסטנדרטי.*

***טענה:*** *לכל מרחב מכפלה פנימית יש בסיס אורתוגונלי.*

***הוכחה:*** *לפי תהליך גרהם-שמידט, שנלמד בסעיף הבא, לכל וקטורים שהם בסיס של מרחב מכפלה פנימית ניתן למצוא וקטורים אורתוגונליים שפורשים את אותו המרחב.*

***טענה:*** *יהיו* v1, v2, …, vn *וקטורים השונים מ-* אורתוגונליים אחד לשני אזי הם בלתי תלויים ליניארית (בת"ל), ומהווים בסיס למרחב שהם פורשים.

***הוכחה:*** נניח כי v1, v2, …, vn וקטורים אורתוגונליים אחד לשני ושונים מ- המקיימים: , כדי להוכיח שהם גם בת"ל יש להוכיח .

*נסתכל על המכפלה הסקלרית הבאה*: *. נצמצם את כל המכפלות הפנימיות של וקטורים אורתוגונליים ונקבל:* . מכיוון ש לפי ההנחה אזי חייב להיות: . כך נעשה לכל הוקטורים כאשר במשוואה הראשונה הוקטור השני במכפלה הפנימית יהיה כל פעם וקטור אחר, ונקבל כנדרש.

### שימוש בבסיס אורתונורמלי

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי v1, v2, …, vn וקטורי הבסיס של V, ויהי . אם נרצה לכתוב את w כצירוף לינארי של הבסיס*, אזי צריך למצוא סקלרים* 𝛼1, 𝛼2, …, 𝛼n כך ש*מתקיים*:. לשם כך צריך לפתור מערכת משוואות ליניאריות שיכולה להיות מאוד מסובכת וארוכה. אמנם אם ידוע כי הבסיס הינו אורתונורמלי זה קל מאוד.

***טענה:*** *יהי* V *מרחב מכפלה פנימית עם מכפלה פנימית* f*, ויהי* v1, v2, …, vn בסיס אורתונורמלי ל-V, ויהי . *אזי* .

***הוכחה:*** *נניח כי .* צ"ל *לכל* i. *נשים לב כי: . נצמצם את כל המכפלות הפנימיות של וקטורים אורתוגונליים ונקבל: . מכיוון שהבסיס גם אורתונורמלי אזי* . ומכאן . מ.ש.ל.

## תהליך גרהם-שמידט

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו u1, u2, …, un וקטורים הפורשים את V אך אינם אורתוגונליים זה לזה, באמצעות תהליך גרהם-שמידט נמצא v1, v2, …, vn וקטורים שהם בסיס אורתוגונלי ל-V.

***קלט:***u1, u2, …, un וקטורים.

**פלט:** v1, v2, …, vn *וקטורים כך ש-*vivj *לכל , הם פורשים את אותו המרחב* span{u1, u2, …, un} = span{v1, v2, …, vn}*. ויותר מכך גם כל* k *וקטורים פורשים את אותו מרחב* span{u1} = span{v1}, span{u1, u2} = span{v1, v2}*, וכן הלאה עד* n.

***תהליך:*** *(1) .*

1. *באופן כללי נגדיר כל וקטור* vi *כאשר* , כלומר: 1, 2, …, i-1, i, …, n בצורה הבאה:

אם נרצה שהבסיס יהיה גם אורתונורמלי ננרמל את כל הוקטורים, כלומר כל וקטור vi נחלק בנורמה שלו . לעיתים כשנרצה לנרמל וקטור vi יהיה יותר נוח לנרמל את הוקטור כדי לצמצם שברים.

## מרחב משלים אורתוגונלי

יהי V מרחב מכפלה פנימית עם מכפלה פנימית f, ויהי U תת מרחב של V כך שמתקיים . אזי "המרחב המשלים האורתוגונלי של U", שאותו נסמן , הוא מרחב שכל וקטור בו שייך ל-V והוא אורתוגונלי לכל הוקטורים ב-U. כלומר .

**טענה:** הוא תת מרחב של V.

**הוכחה:** יש להוכיח שלוש תכונות:

1. צ"ל . אכן מתקיים כי הוקטור אורתוגונלי לכל וקטור. *לכן תמיד שייך למרחב המשלים האורתוגונלי.*
2. צ"ל אם  *אזי . אם*  אזי , ולכן . וכן אם אז*י , ולכן . משתי משוואות אלו יוצא שגם , ואז , לכן .*
3. צ"ל אם  *אזי . אם*  אזי , ולכן *. מכאן שגם מתקיים , ולכן . מסקנה .*

***טענה:*** יהי V מרחב מכפלה פנימית עם מכפלה פנימית f, ויהי U תת מרחב של V כך שמתקיים , *ויהי* u1, u2, u3, …, un *בסיס ל-*U*, ויהי . אם לכל , אזי* v *אורתוגונלי לכל הוקטורים ב-*U*. באמצעות משפט זה, אם נרצה למצוא וקטור ב-,* *אז במקום לעשות אינסוף בדיקות עם כל וקטור ב-*U*, נמצא רק וקטור שאורתוגונלי לבסיס של* U *ואז הוא בודאי אורתוגונלי לכל וקטור ב-*U*.*

***הוכחה:*** *יהי* . נניח שמתקיים *. צ"ל . נציג את* w *כצירוף ליניארי של הבסיס* . נשים לב כי . *כל המכפלות הפנימיות הם של וקטורים אורתוגונליים*, לכן . ואזי כנדרש.

**טענה:** יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי U תת מרחב של V**.** אזי .

**הוכחה:** נוכיח בשיטת אי-שוויון דו-כיווני.

כיוון 1 - נוכיח . יהי u1, u2, …, uk בסיס אורתוגונלי ל-U, ויהי w1, w2, …, wn בסיס אורתוגונלי ל-. אזי כל הבסיסים יחד u1, u2, …, uk, w1, w2, …, wn הם בת"ל לפי טענה 2 בסעיף ח', והם כולם שייכים ל-V. לכן: *.*

*כיוון 2 - נוכיח .* יהי u1, u2, …, uk בסיס ל-U, *נוסיף לבסיס זה עוד וקטורים בת"ל כך שנקבל* u1, u2, …, uk, v1, v2, …, vm *שהוא בסיס ל-*V. *אזי המימד של* V *הוא: , כאשר . יש להוכיח כי .* נפעיל תהליך גרהם שמידט על u1, u2, …, uk, v1, v2, …, vm, ונקבל w1, w2, …, wk, wk+1, wk+2, …, wk+m וקטורים אורתוגונליים זה לזה. לפי התכונה של תהליך גרהם שמידט מתקיים בנוסף: span{u1, u2, …, uk }= span{w1, w2, …, wk }, כלומר w1, w2, …, wk הוא בסיס אורתוגונלי ל-U. מכיוון שכל הוקטורים wk+1, wk+2, …, wk+m אורתוגונליים לוקטורים w1, w2, …, wk, אזי wk+1, wk+2, …, wk+m שייכים ל- *והם גם בת"ל. לכן . מ.ש.ל.*

***טענה:*** *מתקיים:* .

***הוכחה***:*נוכיח לפי המשפט האומר שאם וגם , אזי .*

*נוכיח . יהי , צ"ל . לפי ההנחה* x *אורתוגונלי לכל הוקטורים ב-, לכן אכן מתקיים: . לפי הסעיף קודם מתקיים: . ומכיוון ש- וגם אורתוגונליים אזי גם מתקיים: . אם נחסיר בין המשוואות נקבל . הוכחנו כי לפי המשפט* אכן מתקיים: .

## פעולות בין תתי מרחבים

### חיתוך תתי מרחבים

יהי V מרחב וקטורי ויהיו U1 ו-U2 תתי מרחב של V. החיתוך של שני תתי מרחבים אלו הוא גם תת מרחב של V, המקיים את מערכת המשוואות של שני תתי המרחבים במקביל.

כדי למצוא בסיס ומימד ל- נמצא מערכת משוואות ל- U1 ומערכת משוואות ל-U2, ניקח את כל המשוואות ונציבם ביחד במטריצה ונדרג. נמצא את הפתרונות של כל רכיבי המרחבים x1, x2, …, xn, ונציבם בוקטור אחד. כך נמצא וקטור המקיים את התנאים של U1 וגם את התנאים של-U2. נפרק וקטור זה לפי מספר הפרמטרים שבו כאשר כל וקטור מוכפל בפרמטר אחר. לוקחים את הוקטורים בלבד ללא הפרמטרים שלהם. וקטורים אלו הם בסיס לחיתוך של ומספרם הוא המימד.

### איחוד תתי מרחבים}

*איחוד תתי מרחבים אינו תת מרחב, אלא אם כן אחד מוכל בשני שאז נקבל את המרחב הגדול.*

### חיבור תתי מרחבים

יהי V מרחב וקטורי ויהיו U1 ו-U2 תתי מרחב של V. החיבור של שני תתי מרחבים אלו הוא גם תת מרחב של V, כך:

משפט - מתקיים:

משפט - בדומה לחוקי דה מורגן מתקיים:

אם החיתוך של שני תתי המרחבים U1 ו-U2 - , הוא וקטור ה-0 ((0, 0, 0, …, 0, מה שאומר שגם המימד שלו שווה ל-0, אז הסכום של הוא "סכום ישר". במקרה של סכום ישר מתקיימת הנוסחה: . בנוסף מתקיים: אם (u1, u2, u3, …, un) הוא הבסיס של תת המרחב U1, ו- (w1, w2, w3, …, wn) הוא הבסיס של תת המרחב U2, אז הבסיס של תת המרחב הוא: u1, u2, u3, …, un, w1, w2, w3, …, wn)), כלומר אין וקטורים מיותרים.

## מטריצה אורתוגונלית

תהי מטריצה ריבועית ממשית, אם השורות של המטריצה מהוות בסיס **אורתונורמלי** ל-Rn לפי המכפלה הסקלרית, אזי A היא "מטריצה אורתוגונלית".

**טענה:** A היא מטריצה אורתוגונלית אם ורק אם מתקיים: *. נוכל להסיק מכך כי גם מתקיים:* .

**הוכחה:** נשים לב כי בכפל המטריצות כל איבר בשורה i ובעמודה j הוא בעצם תוצר של מכפלה של שורה i במטריצה A בעמודה j במטריצה AT. אמנם מכיוון שבמטריצה AT כל העמודות מתחלפות עם השורות, כל איבר במטריצה הוא מהצורה . בנוסף, תכונת מכפלה פנימית היא . לכן המטריצה שנקבל היא מהצורה . מכיוון שכל השורות אורתונורמליות זו לזו נקבל שכל מכפלה פנימית כאשר , אמנם כאשר  *מתקיים: . לכן ניתן לראות כי המטריצה שנקבל היא אכן* I.

**טענה:** אם A היא מטריצה אורתוגונלית אזי גם העמודות של A מהוות בסיס אורתונורמלי ל-Rn.

**הוכחה:** בליניארית 1 למדנו כי אם אזי גם *. לכן, אם* A *הינה מטריצה אורתוגונלית אזי נוכל להסיק מטענה קודמת כי גם מתקיים: . נשים לב כי . המסקנה היא שאם* A *הינה מטריצה אורתוגונלית אזי גם* AT *היא מטריצה אורתוגונלית. לפי הגדרת מטריצה אורתוגונלית השורות ב-*AT *אורתוגונליות ל-*,Rn *ומכיוון שהעמודות ב-*A *הם השורות של* AT, *לכן גם העמודות של* A *הינם אורתוגונליות.*

***טענה:*** *אם* A, B *הינם מטריצות אורתוגונליות אזי גם המטריצה* AB *הינה אורתוגונלית.*

***הוכחה:*** *מהמסקנה מטענה 1 ידוע לנו: וגם . נשים לב כי מתקיים: . לכן גם מטריצה* AB *אורתוגונלית.*

***טענה:*** *אם מטריצה* A *אורתוגונלית אזי . אזהרה: זהו לא משפט "אם ורק אם".*

***הוכחה:*** *מכיוון ש-*A *אורתוגונלית אזי , לכן . מלינארית 1 ידוע לנו ש-* וגם . לכן . ומכאן ש-, לכן אכן מתקיים: .

***טענה:*** *יהיו*  *שני וקטורים,* *ויהי* A *מטריצה אורתוגונלית, אזי מתקיים: .*

***הוכחה:*** *.*

***מסקנות****:**(1)**.*

*(2) אם אזי .*

## העתקה אורתוגונלית

*אם* A *היא מטריצה אורתוגונלית אזי ההעתקה הליניארית: היא "העתקה אורתוגונלית". המשמעות הגיאומטרית היא שהעתקה אורתוגונלית רק מסובבת את המרחב ולא מעוותת אותו, אמנם כן יכול להיות שיקוף. כלומר בכל וקטור במרחב נשמרים שתי תכונות:*

1. *כל וקטור שומר על האורך שלו, מפני שהנורמות שוות: .*
2. *כל וקטור שומר על הזווית שלו, מפני שבמשוואה שלמדנו לעיל (סעיף ג' בפרק קודם) שבאמצעותה מחשבים זווית שבין שני וקטורים* u, v *מתקיים: .*

## מטריצה אוניטרית

תהי מטריצה ריבועית מרוכבת, אם השורות של המטריצה מהוות בסיס **אורתונורמלי** ל-Cn לפי המכפלה הסקלרית של המרוכבים, אזי A היא "מטריצה אוניטרית".

מטריצה אוניטרית היא מטריצה שדומה מאוד למטריצה אורתוגונלית, אלא שמטריצה אורתוגונלית היא במספרים מרוכבים ומטריצה אוניטרית היא במספרים מרוכבים. המשפטים שלהם גם זהים מלבד שינוי אחד במשפט על הדטרמיננטה.

**טענה:** A היא מטריצה אוניטרית אם ורק אם מתקיים: *. נוכל להסיק מכך כי גם מתקיים:* . הערה: היא המטריצה המשוחלפת והצמודה של v -

**טענה:** אם A היא מטריצה אוניטרית אזי גם העמודות של A מהוות בסיס אורתונורמלי ל-Cn.

***טענה:*** *אם* A, B *הינם מטריצות אוניטריות אזי גם המטריצה* AB *הינה אוניטרית.*

***טענה:*** *אם מטריצה* A *אוניטרית אזי . כלומר הדטרמיננטה של* A *היא מספר מרוכב שאם נעשה לו ערך מוחלט נקבל 1. אזהרה: זהו לא משפט "אם ורק אם".*

***הוכחה:*** *מכיוון ש-*A *אוניטרית אזי , לכן . מלינארית 1 ידוע לנו ש-* וגם . לכן . ומכאן ש-. וידוע לנו גם מליניארית 1 שכשמכפילים מספר מרוכב בצמוד שלו מקבלים את הערך המוחלט של המספר המרוכב בריבוע, לכן נקבל , ומכאן אכן מתקיים: .

## מטריצה הרמיטית

**הגדרה:** מטריצה מרוכבת A תיקרא "מטריצה הרמיטית" אם מתקיים בה: . במטריצה זו אלכסון ראשי חייב להיות ממספרים ממשיים. לדוגמא: .

## המשפט הספקטרלי

### בממשיים

**המשפט:** תהי A מטריצה ממשית סימטרית, כלומר שמקיימת , אזי:

1. כל הערכים העצמיים של A הם ממשיים.
2. יש ל-A n וקטורים עצמיים אורתוגונליים אחד לשני.

### במרוכבים

**המשפט:** תהי A מטריצה מרוכבת הרמיטית, אזי:

1. כל הערכים העצמיים של A הם ממשיים.
2. יש ל-A n וקטורים עצמיים אורתוגונליים אחד לשני.

**הוכחת (1):** המשפט של הממשיים הוא מקרה פרטי של המרוכבים לכן נוכיח רק עבור המרוכבים. נניח ש-𝜆 ערך עצמי של A עם וקטור עצמי v, כלומר מתקיים: . צ"ל: או במילים אחרות . נסתכל על המכפלה הסקלרית המרוכבת .

מצד אחד מתקיים:

מצד שני מתקיים:

נמצא כי , ומכיוון ש- שהרי , אזי אכן .